

## Egy toronytetőről

A minap fotóztam ezeket a szép templomtorony - tetőket – 1. ábra.



1. ábra

Erről az jutott eszembe, hogy

~ ábrázoljuk / rajzoljuk le;

~ számítsuk ki a felszínét!

Most ezekkel – és a még menet közben adódó más feladatokkal is – foglalkozunk.

Természetesen elég lesz egy toronytetőt lerajzolni, vetületi ábrázolással.

## Vetületi ábrázolás

Először felvesszük a torony alapadatait.

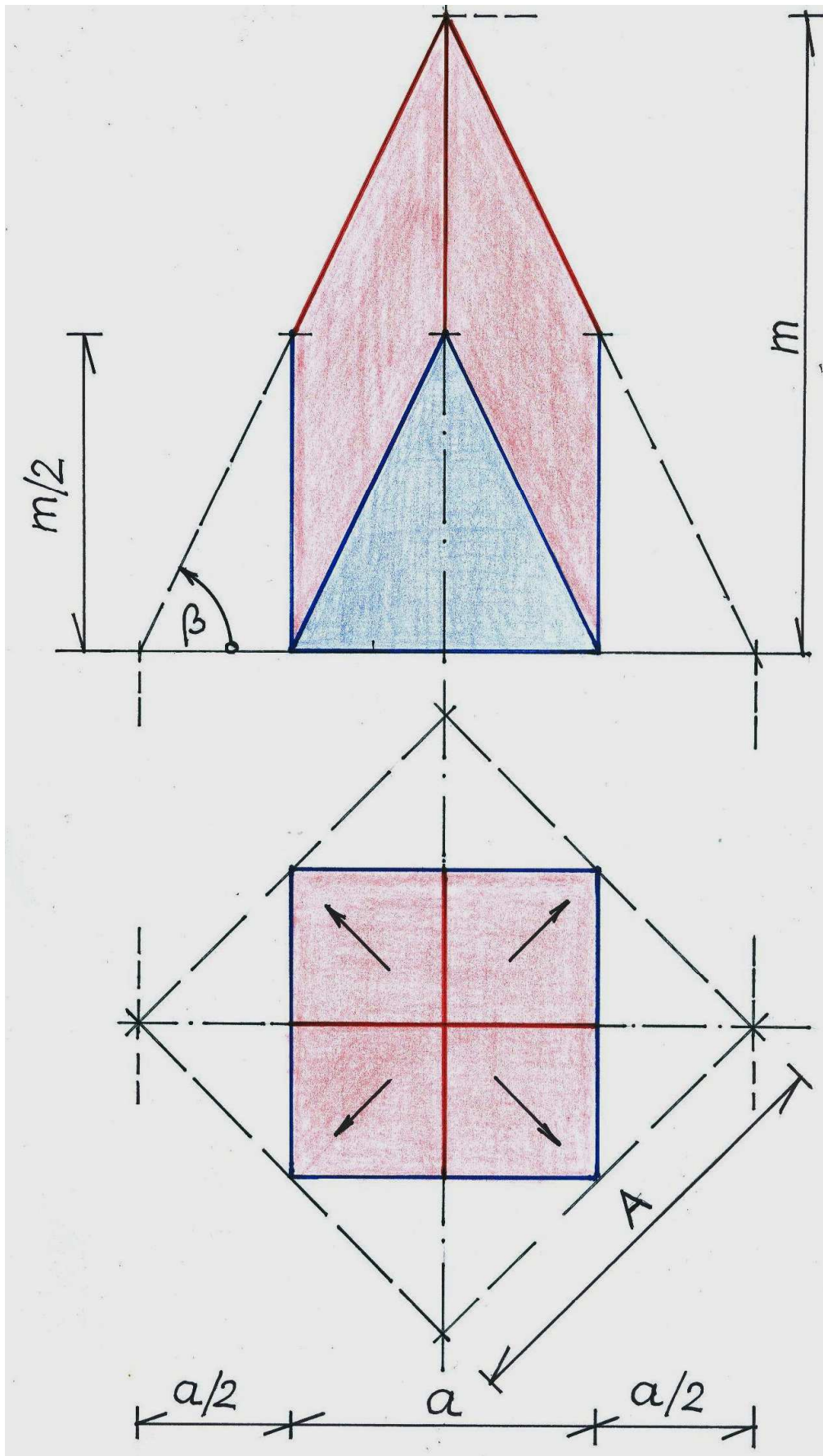
Úgy járunk el, hogy

~ kiindulunk egy **A** alapélű, **m** magasságú *négyzet alapú egyenes gúlából*,

~ majd azt négy *függőleges síkkal csonkoljuk*.

Más szavakkal: felvesszük a tető - alak főbb arányait – v. ö.: [ 1 ]!

Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

**Felzínsszámítás**

Adott:  **$A, m$** .

Keresett:  **$a, \alpha, F$** .

Egy ereszvonal - szakasz  **$a$**  hossza:

$$A \cdot \cos 45^\circ = a \rightarrow a = \frac{A}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

A tetősíkok  **$\alpha$**  hajlásszögére:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{A/2} = 2 \cdot \frac{m}{A}; \quad (2)$$

most (1) és (2) - vel:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{m}{a}. \quad (3)$$

Majd (2) és (3) - mal is:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \left( 2 \cdot \frac{m}{A} \right), \text{ ill.} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \cdot \frac{m}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A tető  **$F$**  felszíne:

$$F = \frac{T_{\text{vet}}}{\cos \alpha}; \quad (5)$$

itt:

$$T_{\text{vet}} = a^2, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (7)$$

így (5), (6) és (7) - tel:

$$F = a^2 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (8)$$

Most ( 1 ), ( 2 ), ( 3 ) és ( 8 ) - cal:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{A^2}{2} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{m}{A}\right)^2}, \text{ ill.} \\ F &= a^2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$


---

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.

### ***Kiegészítő feladatok***

**K1.** Határozzuk meg az élek hajlását!

A 2. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{a} = \frac{m}{\frac{A}{\sqrt{2}}}, \quad (10)$$

innen:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \cdot \frac{m}{A} \right), \text{ ill.} \\ \beta &= \operatorname{arctg} \left( \frac{m}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$


---

**K2.** Határozzuk meg a tetősíkok és az élek hajlása közötti összefüggést!

Most ( 2 ) és ( 10 ) - zel:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 2 \cdot \frac{m}{A}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \sqrt{2} \frac{m}{A}, \end{aligned} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (12)$$

innen:

$$\underline{\underline{\alpha = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \beta \right).}} \quad (13)$$

**K3.** Határozzuk meg az élek **b** hosszát!

Az orom - és gerincélek hossza ugyanakkora; ennek értéke a 2. ábra előlnézeti képéről, *Pitagorász tételével*:

$$\underline{\underline{b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + m^2} .}} \quad (14)$$

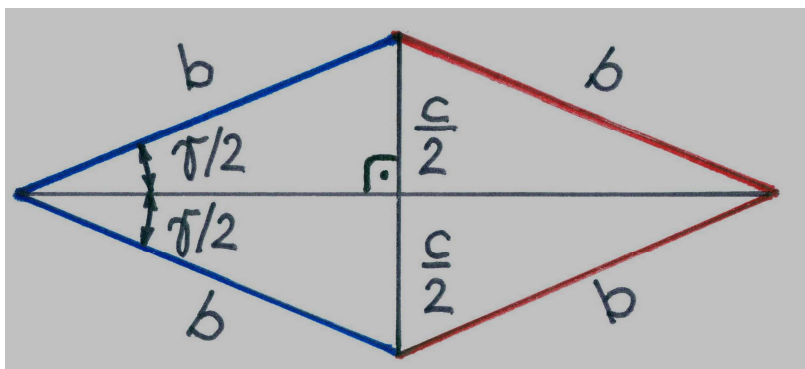
**K4.** Határozzuk meg az élek által közbezárt szögeket!

a.) Az oromélek  $\omega$  közbezárt szöge a 2. ábra szerint, az előlnézet síkjában:

$$2 \cdot \beta + \omega = 180^\circ \rightarrow \underline{\underline{\omega = 180^\circ - 2 \cdot \beta}}, \quad (15)$$

ahol a  $\beta$  szög nagysága ( 11 ) szerint számítható.

b.) A gerincélek  $\gamma$  közbezárt szöge a 2. ábrán nem valódi nagyságában látszik, ezért azt a 3. ábra segítségével számítjuk ki.



3. ábra

A vizsgált síkidom egy rombusz, melynek **b** és **c** adatai már ismertek:

~ **b**: a ( 14 ) képlet,

~ **c**: a 2. ábra felülnézeti képéről leolvashatóan a

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

képlet szerint számítható.

A 3. alapján:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c/2}{b}; \quad (17)$$

most ( 14 ), ( 16 ) és ( 17 ) - tel:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{a}{2 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + m^2}} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + m^2}} ,$$

tehát:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + m^2}} , \quad (18)$$

innen pedig

$$\underline{\underline{\gamma = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + m^2}} \right) .}} \quad (19)$$

Megjegyezzük, hogy a 3. ábra szerint

~ az oromélek  $\gamma$  szöget is bezárnak, csak nem a 2. ábra előlnézeti síkjában;

~ a gerincélek ugyanazt a  $\gamma$  szöget zárják be, mint az ott ábrázolt oromélek is.

c.) Egy oromél és egy gerincél olyan  $\lambda$  szöget zár be, melyre a 3. ábra szerint:

$$\underline{\underline{\lambda = 180^\circ - \gamma}} \quad (20)$$

ahol  $\gamma$  nagysága ( 19 ) szerint számítható.

**K5.** Ellenőrizzük a tetőfelszín eredményét a hagyományos úton!

$$F = 4 \cdot T_{\text{rombusz}} ; \quad (21)$$

ámde a 3. ábra szerint:

$$T_{\text{rombusz}} = 2 \cdot T_{\Delta} , \quad (22)$$

valamint

$$T_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \cos \frac{\gamma}{2} . \quad (23)$$

Most ( 21 ), ( 22 ) és ( 23 ) - mal:

$$F = 4 \cdot T_{\text{rombusz}} = 4 \cdot 2 \cdot T_{\Delta} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cdot c \cdot b \cdot \cos \frac{\gamma}{2} . \quad (24)$$

Trigonometriai azonossággal és ( 18 ) - cal:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \sqrt{1 - \left( \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + m^2}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2 / 2}{a^2 + m^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + m^2 - a^2 / 2}{a^2 + m^2}} = \sqrt{\frac{a^2 / 2 + m^2}{a^2 + m^2}} ;\end{aligned}\quad (25)$$

majd ( 14 ), ( 16 ), ( 24 ) és ( 25 ) - tel:

$$\begin{aligned}F &= 4 \cdot c \cdot b \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + m^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 / 2 + m^2}{a^2 + m^2}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2} = a \cdot \sqrt{a^2 + 2 \cdot m^2} = a^2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{m^2}{a^2}} = \\ &= a^2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left( \frac{m}{a} \right)^2} ,\end{aligned}$$

tehát:

$$F = a^2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left( \frac{m}{a} \right)^2} ,$$

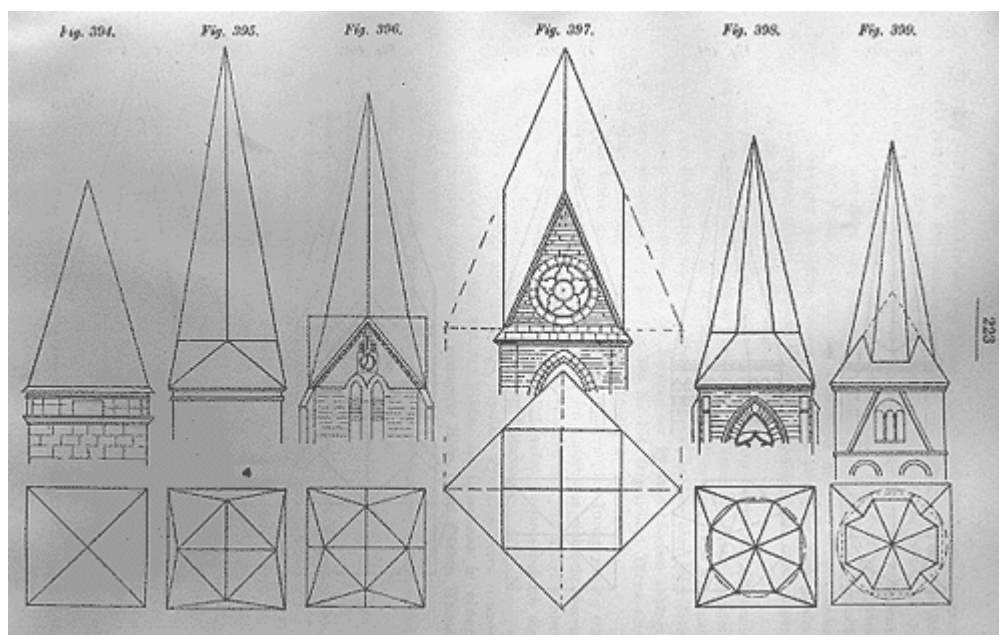
egyezésben ( 9 / 2 ) - vel.

Ezzel a kiegészítő feladatokat is megoldottuk. Az Olvasó azonban még hosszan folytathatja a kapcsolódó feladatok felállítását és megoldását. Tegye ezt!

### Utóírat:

U1. Dolgozatom megírása után az alábbi képet találtam az interneten – 4. ábra;  
forrása: <http://www.c3.hu/perspekt/adatbazis/abrah.php3?MUID=71&LN=1>

Esetünkhöz a jobbról a harmadik tető - kép tartozik. Megjegyzem, az [ 1 ] - beli hasonló ábra nem ilyen részletes, vagyis az nem támogatta úgy a fenti vetületi ábrázolást, mint ez.



4. ábra

Eszerint hiányos adatokból is a helyes eredményre jutottam.

U2. A szakirodalomból megtudtam, hogy ezen tetőalak becsületes neve: **rombusztető** – [ 2 ]. Tény, hogy naponta nem találkozunk vele.

U3. A [ 3 ] anyagban, a 24. feladatban, a tetőfelszín megadott képletét kell igazolni, mely – eltérő alakja ellenére – egyezik az ittenivel.  
Itt a tetőalak neve, magyarra fordítva: **rajnai rombusztető**.

### Irodalom:

[ 1 ] – **Kószó József**: Háztetők – 1. kötet  
Szukits Könyvkiadó, 2005., 30. o.

[ 2 ] – [http://epuletszerkezetek.ymmf.hu/targyak/sgymmag205/ea\\_fedel1.pdf](http://epuletszerkezetek.ymmf.hu/targyak/sgymmag205/ea_fedel1.pdf)

[ 3 ] – <http://www.poenitz-net.de/Mathematik/2.Geometrie/2.8.A.Pythagoras.pdf>

Összeállította: Galgóczi Gyula  
mérnök tanár

Szödliget, 2012. július 3.